2024年度　奨学生入学試験

数　　学

（試験時間　60分）

I　注 意 事 項

1　**試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。**

2　この問題冊子は，25ページあります。出題科目，ページ及び選択方法は，下表のとおりです。

出 題 科 目		ペ ー ジ	選 択 方 法
数学①	数学Ⅰ・数学A	3 ～ 13	数学①もしくは数学②のどちらか**1科目を選択して解答しなさい。** ただし，**教育学部学校教育課程**を志願し，文系型で数学を受験する者は**数学①を**，理系型で数学を受験する者は**数学②を必ず受験すること。**
数学②	数学Ⅰ・数学A 数学Ⅱ・数学B	15 ～ 25	

3　試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせなさい。

4　**解答用紙には解答欄以外に次の記入欄があるので，それぞれ正しく記入し，マークしなさい。**

①　**試験コード欄・座席番号欄**

試験コード・座席番号(数字)を**記入**し，さらにその下のマーク欄に**マーク**しなさい。**正しくマークされていない場合は，採点できないことがあります。**

②　**氏名欄**

氏名・フリガナを**記入**しなさい。

③　**解答科目欄**

解答する科目を一つ選び，科目名の右の〇に**マーク**しなさい。**マークされていない場合又は複数の科目にマークされている場合は，０点**となります。

5　問題冊子の余白等は適宜利用してよいが，どのページも切り離してはいけません。

6　試験終了後，問題冊子は持ち帰りなさい。

裏表紙へ続く，裏表紙も必ず読むこと。

Ⅱ　解答上の注意

1　解答は，解答用紙の問題番号に対応した解答欄にマークしなさい。

2　問題の文中の $\boxed{\text{ア}}$ ，$\boxed{\text{イウ}}$ などには，符号(－，±)又は数字(０～９)が入ります。ア，イ，ウ，…の一つ一つは，これらのいずれか一つに対応します。それらを解答用紙のア，イ，ウ，…で示された解答欄にマークして答えなさい。

例　$\boxed{\text{アイウ}}$ に－35 と答えたいとき

ア	●	±	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
イ	－	±	0	1	2	●	4	5	6	7	8	9
ウ	－	±	0	1	2	3	4	●	6	7	8	9

3　分数形で解答する場合，分数の符号は分子につけ，分母につけてはいけません。

例えば，$\dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ に $-\dfrac{2}{3}$ と答えたいときは，$\dfrac{-2}{3}$ として答えなさい。

また，それ以上約分できない形で答えなさい。

例えば，$\dfrac{1}{2}$ と答えるところを，$\dfrac{2}{4}$ のように答えてはいけません。

4　小数の形で解答する場合，指定された桁数の一つ下の桁を四捨五入して答えなさい。また，必要に応じて，指定された桁まで⓪にマークしなさい。

例えば，$\boxed{\text{キ}}.\boxed{\text{クケ}}$ に 4.5 と答えたいときは，4.50 として答えなさい。

5　根号を含む形で解答する場合，根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

例えば，$\boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}}$ に $6\sqrt{2}$ と答えるところを，$3\sqrt{8}$ のように答えてはいけません。

6　根号を含む分数形で解答する場合，例えば $\dfrac{\boxed{\text{シ}}+\boxed{\text{ス}}\sqrt{\boxed{\text{セ}}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ に $\dfrac{1+2\sqrt{2}}{3}$ と答えるところを，$\dfrac{2+4\sqrt{2}}{6}$ や $\dfrac{2+2\sqrt{8}}{6}$ のように答えてはいけません。

7　問題の文中の二重四角で表記された $\boxed{\boxed{\text{タ}}}$ などには，選択肢から一つを選んで，答えなさい。

8　同一の問題文中に $\boxed{\text{チツ}}$ ，$\boxed{\boxed{\text{テ}}}$ などが２度以上現れる場合，原則として，２度目以降は，$\boxed{\text{チツ}}$ ，$\boxed{\boxed{\text{テ}}}$ のように細字で表記します。

数学② 〔数学Ⅰ・数学A
数学Ⅱ・数学B〕

数学①もしくは数学②のどちらか**１科目を選択して解答しなさい。**

教育学部 学校教育課程を志願し，文系型で数学を受験する者は**数学①を**，理系型で数学を受験する者は**数学②を必ず受験すること。**

解答用紙の解答科目欄に**解答する科目を必ずマークすること。**

数学②〔数学Ⅰ・数学A / 数学Ⅱ・数学B〕

第1問

(1) $7-2\sqrt{3}$ の整数部分を a，小数部分を b とすると

$$a = \boxed{\text{ア}}, \quad \frac{1}{b} - \frac{1}{a-1} = \frac{\boxed{\text{イ}} + \sqrt{\boxed{\text{ウ}}}}{\boxed{\text{エ}}}$$

である。

(2) 次の $\boxed{\text{オ}}$ ，$\boxed{\text{カ}}$ に当てはまるものを，下の⓪～③のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

(i) x，y を実数とする。

$|x| = |y|$ が成り立つことは，$2x^2 + y^2 - 2x(y + 1) + 1 = 0$ が成り立つための $\boxed{\text{オ}}$ 。

(ii) $\triangle$ABC において，$\sin A \cdot \cos B = \sin C$ が成り立つことは，$\angle\mathrm{A} = 90^\circ$ であるための $\boxed{\text{カ}}$ 。

⓪ 必要十分条件である

① 必要条件であるが，十分条件ではない

② 十分条件であるが，必要条件ではない

③ 必要条件でも十分条件でもない

(3) 不等式 $|3p - 1| - |p + 1| \leqq 7$ を満たす実数 p の値の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケ}}} \leqq p \leqq \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$$

である。

(4)(i)　$0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，$f(\theta) = \sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta$ のとり得る値の範囲は

$$\boxed{\text{シス}} \leqq f(\theta) \leqq \boxed{\text{セ}}$$

である。

(ii)　実数 x が $\sin 2x = 4\sin^2 x$ を満たすとき

$$\tan x = \boxed{\text{ソ}},\ \frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}$$

である。

(5) $\triangle$ABC において，AB = 2，BC = 3，CA = $\sqrt{3}$ であるとき

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \boxed{\text{ツテ}}$$

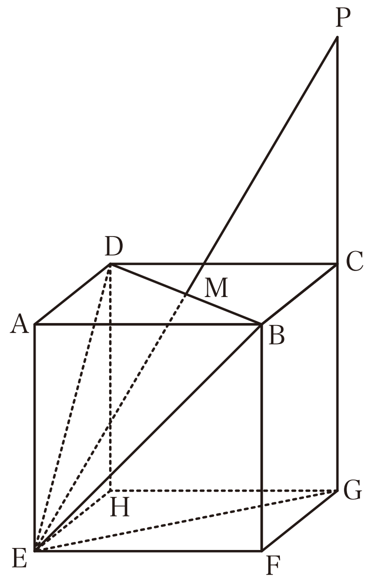
である。また，頂点 B から直線 AC に垂線を下ろし，直線 AC との交点を H とすると

$$\frac{AH}{AC} = \frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}},\quad \overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CH} = \frac{\boxed{\text{ニヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}$$

である。

第２問

直方体 ABCD−EFGH において，AB = AE であり，長方形 ABCD の対角線 BD の長さは 3，△BDE の外接円 K の半径は 2 である。また，平面 BDE と直線 CG の交点を P とすると，線分 PE は対角線 BD の中点 M を通る。さらに，線分 EG を 1∶2 に内分する点を Q とし，直線 PQ と直線 GM の交点を R とする。



(1)　△BDE に正弦定理を用いると

$$\mathrm{BE} = \boxed{\text{ア}}\ \sin\angle\mathrm{BDE}$$

である。また，AB = AE であることより，二つの直角三角形△DAB と△DAE は合同であるので，BD = ED である。よって，余弦定理を用いると

$$\mathrm{BE}^2 = \boxed{\text{イウ}} - \boxed{\text{エオ}}\cos\angle\mathrm{BDE}$$

である。これらから

$$\cos\angle\mathrm{BDE} = \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$$

であり

$$\mathrm{BE} = \frac{\boxed{\text{ク}}\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}}{\boxed{\text{コ}}}$$

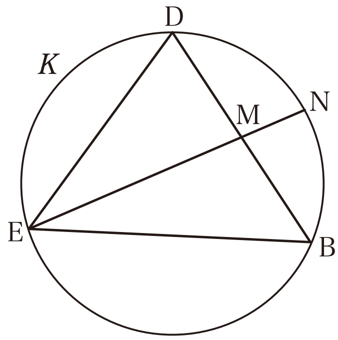
である。

(2)　$\mathrm{EM} = \dfrac{\boxed{サ}\sqrt{\boxed{シ}}}{\boxed{ス}}$

である。また，直線 EM と円 K の交点のうち，E と異なるものを N とおくと

$\mathrm{MN} = \dfrac{\sqrt{\boxed{セ}}}{\boxed{ソ}}$

である。



(3)　直方体 ABCD−EFGH の辺 AB，AE，AD について

$\mathrm{AB} = \mathrm{AE} = \dfrac{\boxed{タ}\sqrt{\boxed{チツ}}}{\boxed{テ}}$，$\mathrm{AD} = \dfrac{\boxed{ト}\sqrt{\boxed{ナ}}}{\boxed{テ}}$

である。また，△PEQ と直線 GM に着目すると

$\dfrac{\mathrm{RQ}}{\mathrm{PR}} = \dfrac{\boxed{ニ}}{\boxed{ヌ}}$

であるから

$\mathrm{RQ} = \dfrac{\sqrt{\boxed{ネノハ}}}{\boxed{ヒ}}$

である。

第3問

4個のさいころを同時に投げる。

(1) 6の目が出ない確率は $\left(\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\right)^4$ である。また，4個のさいころの目の最大値が3となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ウエ}}}{\boxed{\text{イ}}^4}$ であり，4個のさいころの目の平均値が2となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{オカ}}}{\boxed{\text{イ}}^4}$ である。

(2) 4個のさいころの目がすべて異なる確率は $\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{クケ}}}$ である。また，ちょうど3種類の目が出る確率は $\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ である。

⑶　4 個のさいころの目の最大値が 5 で，かつ最小値が 3 である確率は

$\dfrac{\boxed{\text{シス}}}{\boxed{\text{セソタ}}}$ である。

⑷　1 の目が少なくとも 2 個出る確率は $\dfrac{\boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{テトナ}}}$ である。また，1 の目が少なくとも 2 個出るとき，4 個のさいころの目の和が 9 以上となる確率は

$\dfrac{\boxed{\text{ニヌネ}}}{\boxed{\text{ノハヒ}}}$ である。

第４問

a は -4 と異なる有理数の定数とし，二つの関数

$$f(x) = ax^2 + ax$$

$$g(x) = \frac{1}{3}x^3 + (a+4)x^2 + \frac{10}{3}$$

について考える。$y = f(x)$ のグラフを C_1，$y = g(x)$ のグラフを C_2 とする。C_1，C_2 は共有点 P をもち，点 P において共通の接線 ℓ をもつものとする。また，点 P の x 座標を t とする。

(1)　関数 $g(x)$ は $x = \boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イウ}}\,a - \boxed{\text{エ}}$ で極値をとる。

(2)　与えられた条件から a，t を求める。

点 P は C_1，C_2 の共有点であり，C_1 と C_2 は点 P において共通の接線 ℓ をもつことから，$x = t$ は連立方程式

$$\begin{cases} f(x) = g(x) & \cdots\cdots \text{①} \\ f'(x) = g'(x) & \cdots\cdots \text{②} \end{cases}$$

の解である。①より

$$ax = \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}x^3 + \boxed{\text{キ}}\,x^2 + \frac{10}{3} \quad \cdots\cdots \text{③}$$

であり，②より

$$a = x^2 + \boxed{\text{ク}}\,x \quad \cdots\cdots \text{④}$$

である。③，④と $\sqrt{5}$ が無理数であることより

$$a = \boxed{\text{ケコ}}, \quad t = \boxed{\text{サシ}}$$

を得る。したがって，$g(x)$ の極大値は $\dfrac{\boxed{\text{スセ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$，極小値は $-\dfrac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ である。

(3)　接線 ℓ の方程式は

$$y = \boxed{\text{ツ}}\,x + \boxed{\text{テ}}$$

であり，接線 ℓ と C_2 の共有点の x 座標は $\boxed{\text{サシ}}$ ，$\boxed{\text{トナ}}$ である。

(4)　C_2 と接線 ℓ，および直線 $x = 2$ によって囲まれる部分の面積を S とすると

$$S = \frac{\boxed{\text{ニヌネ}}}{\boxed{\text{ノ}}}$$

である。